

# Legami costitutivi - Calcestruzzo

## Mander

J.B. Mander, M.J.N. Priestley e R. Park, *Theoretical stress-strain model for confined concrete*, Journal of Structural Engineering, ASCE, vol. 14, no. 8, 1988.

### Calcestruzzo non confinato

Parametri da definire:

$$f_c$$

$$\epsilon_{c0} = 0.002 \quad \text{citato nell'articolo}$$

$$\epsilon_{cu} = 0.004 \quad \text{non lo trovo nell'articolo}$$

$$E_c = 5000 \sqrt{f_c} \quad \text{Mander indica questo; abbiamo assunto che sia il valore secante a } 0.4 f_c$$

Legame costitutivo:

$$\sigma_c = f_c \frac{r \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}}}{r - 1 + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} \right)^r}$$

con

$$r = \frac{E_c}{E_c - E_{\text{sec}}} \quad E_{\text{sec}} = \frac{f_c}{\epsilon_{c0}}$$

Nota: abbiamo utilizzato qui  $E_{c0}$  cioè il valore tangente all'origine, pari a  $1.05 E_c$ .

### Calcestruzzo confinato

Parametri da definire:

$$\rho, \quad \alpha \omega_{st} \quad \text{in aggiunta a quelli del calcestruzzo non confinato}$$

da cui ricavare i parametri che seguono (o assegnarli direttamente)

$$f_c^c = k f_c \quad k = 2.254 \sqrt{1 + 3.97 \alpha \omega_{st}} - \alpha \omega_{st} - 1.254$$

$$\epsilon_{c0}^c = [1 + 5(k - 1)] \epsilon_{c0} \quad \text{citato nell'articolo}$$

$$\epsilon_{cu}^c = \epsilon_{cu} + \frac{1.4 \rho f_y}{f_c^c} \epsilon_{su} = \epsilon_{cu} + \frac{1.4 \omega_{st}}{k} \epsilon_{su} \quad \epsilon_{cu}^c = \epsilon_{cu} + \frac{1.4 \alpha \omega_{st}}{k} \epsilon_{su} \quad \text{non lo trovo nell'articolo}$$

Nota: ho deciso, per coerenza (oltre che per comodità operativa), che nella espressione di sopra si debba usare  $\alpha \omega_{st}$  e non solo  $\omega_{st}$

Legame costitutivo:

$$\sigma_c^c = f_c^c \frac{r \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c}}{r - 1 + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} \right)^r}$$

con

$$r = \frac{E_c}{E_c - E_{\text{sec}}} \quad E_{\text{sec}} = \frac{f_c^c}{\epsilon_{c0}^c}$$

Nota: questo legame dipende anche dalla deformazione ultima  $\epsilon_{su}$  dell'acciaio delle staffe.

## Kent e Park

D.C. Kent, R. Park, *Flexural members with confined concrete*, Journal of Structural Engineering, ASCE, vol. 97, no. ST7, 1971.

R. Park, M.J.N. Priestley, W.D. Gill, *Ductility of square-confined concrete columns*, Journal of Structural Engineering, ASCE, vol. 104, no. ST4, 1982.

### Calcestruzzo non confinato

Parametri da definire:

$$f_c$$

$$\epsilon_{c0} = 0.002 \quad \text{citato nell'articolo}$$

$$\epsilon_{cu} = 0.0035 \quad \text{ritengo sia una nostra assunzione, non presente nell'articolo}$$

Nota: non occorre  $E_c$ , ma l'abbiamo comunque definito usando le formule EC2

*Legame costitutivo:*

$$\sigma_c = f_c \left[ 2 \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} \right)^2 \right] \quad \text{per } \epsilon \leq \epsilon_{c0}$$

$$\sigma_c^c = \max \begin{cases} f_c [1 - Z (\epsilon_c - \epsilon_{c0})] \\ 0.2 f_c \end{cases} \quad \text{per } \epsilon > \epsilon_{c0}$$

con

$$Z = \frac{0.5}{\epsilon_{50} - \epsilon_{c0}} \quad \epsilon_{50} = \frac{3 + 0.29 f_c}{145 f_c - 1000}$$

### Calcestruzzo confinato

Parametri da definire:

$\rho, \alpha \omega_{st}$  in aggiunta a quelli del calcestruzzo non confinato

da cui ricavare i parametri che seguono (o assegnarli direttamente)

$$f_c^c = k f_c \quad k = 1 + \alpha \omega_{st} \quad \text{ok (ma nell'articolo non c'è } \alpha \text{)}$$

$$\epsilon_{c0}^c = k \epsilon_{c0} \quad \text{citato nell'articolo}$$

$$\epsilon_{cu}^c = \epsilon_{cu} + 0.1 \alpha \omega_{st} \quad \text{ritengo sia una nostra assunzione, non presente nell'articolo}$$

$$\epsilon_{50,h} = 0.75 \rho_{st} \sqrt{\frac{b}{s}} \quad \text{citato nell'articolo}$$

$b$  è riferito alla sezione confinata; per sezione generica abbiamo assunto  $b = A/h$ .

*Legame costitutivo:*

$$\sigma_c^c = f_c^c \left[ 2 \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} \right)^2 \right] \quad \text{per } \epsilon \leq \epsilon_{c0}^c$$

$$\sigma_c^c = \max \begin{cases} f_c^c [1 - Z (\epsilon_c - \epsilon_{c0}^c)] \\ 0.2 f_c^c \end{cases} \quad \text{per } \epsilon > \epsilon_{c0}^c$$

con

$$Z = \frac{0.5}{\epsilon_{50}^c - \epsilon_{c0}^c} \quad \epsilon_{50}^c = \epsilon_{50} + \epsilon_{50,h}$$

## Sargin (espressioni generali)

Sargin, *Stress-Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections*. SM Study 4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Canada, 1971.

### Calcestruzzo non confinato

Parametri da definire:

$$f_c$$

$$\epsilon_{c0} = 0.0024$$

nel programma compare questo valore, ma non so perché

$$\epsilon_{cu} = 0.0035$$

abbiamo utilizzato i valori dell'EC2

$$E_c = 22000 \left( \frac{f_c}{10} \right)^{0.3} \quad \text{valore secante a } 0.4 f_c \text{ (da EC2)}$$

Nota: a rigore si dovrebbe fare distinzione tra  $f_c$  e  $f_{cm}$ . Abbiamo ritenuto che l'EC2 lo faccia perché usa un valore cautelativo  $f_{ck}$  come resistenza, mentre in questo programma si usa in genere come resistenza il valore medio. Se avessimo voluto mantenere la distinzione avremmo dovuto mettere in questa espressione di  $E_c$  il valore  $f_c + 8$ .

*Legame costitutivo:*

$$\sigma_c = f_c \frac{A \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} + (D-1) \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} \right)^2}{1 + (A-2) \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} + D \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} \right)^2} \quad \text{con} \quad A = \frac{E_c \epsilon_{c0}}{f_c} \quad D = 0.8 - 0.00725 f_c$$

Nota: abbiamo utilizzato qui  $E_{c0}$  cioè il valore tangente all'origine, pari a  $1.05 E_c$ .

### Calcestruzzo confinato

Parametri da definire:

$\rho, \alpha \omega_{st}$  in aggiunta a quelli del calcestruzzo non confinato

da cui ricavare i parametri che seguono (o assegnarli direttamente)

$$f_c^c = k f_c$$

$$k = 1 + 0.0146 (1 - 0.245 S_{Be}) S_f \rho \frac{f_y}{\sqrt{f_c}} \times 12.0432 \quad 12.0432 \text{ fattore di conversione psi} \rightarrow \text{MPa}$$

$$\epsilon_{c0}^c = \epsilon_{c0} + 0.0374 (1 - 0.734 S_{Be}) S_f \rho \frac{f_y}{1000 \sqrt{f_c}} \times 12.0432$$

$$S_{Be} = \frac{s}{b} \quad b \text{ dimensione minima della sezione confinata; per sezione generica abbiamo assunto } b = A/h$$

$$S_f = 2 \frac{b h}{b^2 + h^2} \quad b, h \text{ dimensioni della sezione confinata; per sezione generica abbiamo assunto } h \text{ distanza tra punto superiore e inferiore della sezione}$$

$$\epsilon_{cu}^c = \epsilon_{cu} + 0.1 \alpha \omega_{st} \quad \text{ritengo sia una nostra assunzione, non presente nell'articolo; per evitare } \sigma \text{ negative si pone il limite } \epsilon_{cu}^c = \epsilon_{c0}^c A / (1 - D) \text{ con } A \text{ e } D \text{ qui sotto}$$

*Legame costitutivo:*

$$\sigma_c^c = f_c^c \frac{A \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} + (D-1) \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} \right)^2}{1 + (A-2) \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} + D \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} \right)^2} \quad \text{con} \quad A = \frac{E_c \epsilon_{c0}^c}{f_c^c} \quad D = 0.8 - 0.00725 f_c$$

Dubbio: perché in D c'è  $f_c$  (non confinato)?

## Sargin (semplificato)

Definito da noi usando Sargin ma con  $f_c^c$  e  $\epsilon_{c0}^c$  determinati mediante le espressioni dell'EC2.

### Calcestruzzo non confinato

Parametri da definire:

$$f_c$$

$$\epsilon_{c0} = 0.0007 f_c^{0.31} \quad \text{abbiamo utilizzato i valori dell'EC2}$$

$$\epsilon_{cu} = 0.0035 \quad \text{per } f_c \leq 50 \text{ MPa} \quad \text{abbiamo utilizzato i valori dell'EC2}$$

$$\epsilon_{cu} = 0.0028 + 0.027 \left( \frac{98 - f_c}{100} \right)^4 \quad \text{per } f_c > 50 \text{ MPa}$$

$$E_c = 22000 \left( \frac{f_c}{10} \right)^{0.3} \quad \text{valore secante a } 0.4 f_c \text{ (da EC2)}$$

Nota: a rigore si dovrebbe fare distinzione tra  $f_c$  e  $f_{cm}$ . Abbiamo ritenuto che l'EC2 lo faccia perché usa un valore cautelativo  $f_{ck}$  come resistenza, mentre in questo programma si usa in genere come resistenza il valore medio. Se avessimo voluto mantenere la distinzione avremmo dovuto mettere in questa espressione di  $E_c$  il valore  $f_c + 8$ .

*Legame costitutivo:*

$$\sigma_c = f_c \frac{A \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} + (D-1) \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} \right)^2}{1 + (A-2) \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} + D \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} \right)^2}$$

con

$$A = \frac{E_c \epsilon_{c0}}{f_c} \quad D = 0.8 - 0.00725 f_c$$

Nota: abbiamo utilizzato qui  $E_{c0}$  cioè il valore tangente all'origine, pari a  $1.05 E_c$ .

### Calcestruzzo confinato

Parametri da definire:

$\rho, \quad \alpha \omega_{st}$  in aggiunta a quelli del calcestruzzo non confinato

da cui ricavare i parametri che seguono (o assegnarli direttamente)

$$f_c^c = k f_c$$

$$k = \begin{cases} 1.000 + 2.50 \alpha \omega_{st} & \text{per } \alpha \omega_{st} \leq 0.1 \\ 1.125 + 1.25 \alpha \omega_{st} & \text{per } \alpha \omega_{st} > 0.1 \end{cases} \quad \text{abbiamo utilizzato i valori dell'EC2}$$

$$\epsilon_{c0}^c = k^2 \epsilon_{c0} \quad \text{abbiamo utilizzato i valori dell'EC2}$$

$$\epsilon_{cu}^c = \epsilon_{cu} + 0.1 \alpha \omega_{st} \quad \text{ritengo sia una nostra assunzione, non presente nell'articolo; per evitare } \sigma \text{ negative si pone il limite } \epsilon_{cu}^c = \epsilon_{c0}^c A / (1 - D) \text{ con } A \text{ e } D \text{ qui sotto}$$

*Legame costitutivo:*

$$\sigma_c^c = f_c^c \frac{A \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} + (D-1) \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} \right)^2}{1 + (A-2) \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} + D \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} \right)^2}$$

$$\text{con } A = \frac{E_c \epsilon_{c0}^c}{f_c^c} \quad D = 0.8 - 0.00725 f_c$$

Dubbio: perché in  $D$  c'è  $f_c$  (non confinato)?

## EC2

Legame proposto dall'Eurocodice 2, derivato da quello di Sargin con varie semplificazioni.

### Calcestruzzo non confinato

Parametri da definire:

$$f_c$$

$$\epsilon_{c0} = 0.0007 f_c^{0.31}$$

$$\epsilon_{cu} = 0.0035 \quad \text{per } f_c \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{cu} = 0.0028 + 0.027 \left( \frac{90 - f_c}{100} \right)^4 \quad \text{per } f_c > 50 \text{ MPa}$$

$$E_c = 22000 \left( \frac{f_c}{10} \right)^{0.3} \quad \text{valore secante a } 0.4 f_c \text{ (da EC2)}$$

Nota: a rigore si dovrebbe fare distinzione tra  $f_c$  e  $f_{cm}$ . Abbiamo ritenuto che l'EC2 lo faccia perché usa un valore cautelativo  $f_{ck}$  come resistenza, mentre in questo programma si usa in genere come resistenza il valore medio. Se avessimo voluto mantenere la distinzione avremmo dovuto mettere in questa espressione di  $E_c$  il valore  $f_c + 8$ .

*Legame costitutivo:*

$$\sigma_c = f_c \frac{A \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} \right)^2}{1 + (A - 2) \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}}}$$

con

$$A = \frac{E_c \epsilon_{c0}}{f_c}$$

Nota: abbiamo utilizzato qui  $E_{c0}$  cioè il valore tangente all'origine, pari a  $1.05 E_c$ .

### Calcestruzzo confinato

Parametri da definire:

$\rho, \quad \alpha \omega_{st}$  in aggiunta a quelli del calcestruzzo non confinato  
da cui ricavare i parametri che seguono (o assegnarli direttamente)

$$f_c^c = k f_c$$

$$k = \begin{cases} 1.000 + 2.50 \alpha \omega_{st} & \text{per } \alpha \omega_{st} \leq 0.1 \\ 1.125 + 1.25 \alpha \omega_{st} & \text{per } \alpha \omega_{st} > 0.1 \end{cases}$$

$$\epsilon_{c0}^c = k^2 \epsilon_{c0}$$

$$\epsilon_{cu}^c = \epsilon_{cu} + 0.1 \alpha \omega_{st} \quad \text{per evitare } \sigma \text{ negative si pone il limite } \epsilon_{cu}^c = \epsilon_{c0}^c A / (1 - D) \text{ con } A \text{ qui sotto e } D=0$$

*Legame costitutivo:*

$$\sigma_c^c = f_c^c \frac{A \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} \right)^2}{1 + (A - 2) \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c}} \quad \text{con} \quad A = \frac{E_c \epsilon_{c0}^c}{f_c^c}$$

## Parabola-rettangolo

Legame proposto da EC2, da usare per verifiche di resistenza, non per valutare la duttilità.

### Calcestruzzo non confinato

Parametri da definire:

$$f_c$$

$$\epsilon_{c0} = 0.002 \quad \text{per } f_c \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{c0} = 0.002 + 0.000085 (f_c - 50)^{0.53} \quad \text{per } f_c > 50 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{cu} = 0.0035 \quad \text{per } f_c \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{cu} = 0.0026 + 0.035 \left( \frac{90 - f_c}{100} \right)^4 \quad \text{per } f_c > 50 \text{ MPa}$$

Nota: non occorre  $E_c$ , ma l'abbiamo comunque definito usando le formule EC2

*Legame costitutivo:*

$$\sigma_c = f_c \left[ 2 \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} \right)^n \right] \quad \text{per } \epsilon \leq \epsilon_{c0}$$

$$\sigma_c^c = f_c \quad \text{per } \epsilon > \epsilon_{c0}$$

con

$$n = 2 \quad \text{per } f_c \leq 50 \text{ MPa} \quad \quad n = 1.4 + 23.4 \left( \frac{90 - f_c}{100} \right)^4 \quad \text{per } f_c > 50 \text{ MPa}$$

### Calcestruzzo confinato

Parametri da definire:

$\rho, \alpha \omega_{st}$  in aggiunta a quelli del calcestruzzo non confinato

da cui ricavare i parametri che seguono (o assegnarli direttamente)

$$f_c^c = k f_c \quad k = \begin{cases} 1.000 + 2.50 \alpha \omega_{st} & \text{per } \alpha \omega_{st} \leq 0.1 \\ 1.125 + 1.25 \alpha \omega_{st} & \text{per } \alpha \omega_{st} > 0.1 \end{cases}$$

$$\epsilon_{c0}^c = k^2 \epsilon_{c0}$$

$$\epsilon_{cu}^c = \epsilon_{cu} + 0.1 \alpha \omega_{st}$$

*Legame costitutivo:*

$$\sigma_c^c = f_c^c \left[ 2 \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}^c} \right)^2 \right] \quad \text{per } \epsilon \leq \epsilon_{c0}^c$$

$$\sigma_c^c = f_c^c \quad \text{per } \epsilon > \epsilon_{c0}^c$$

con

$$n = 2 \quad \text{per } f_c \leq 50 \text{ MPa} \quad \quad n = 1.4 + 23.4 \left( \frac{90 - f_c}{100} \right)^4 \quad \text{per } f_c > 50 \text{ MPa}$$

quale  $f_c$  (confinato o non)?

## Modelli per scarico e ricarico

Indipendentemente dal legame costitutivo, nelle fasi di carico e scarico si è utilizzata una versione semplificata del modello di Palermo e Vecchio (PV).

Si indica con  $\epsilon_{\min}$  ( $\epsilon_{2c}$  per PV) la deformazione minima (ovvero il massimo accorciamento) del calcestruzzo. Il parametro  $\epsilon_{c0}$  ( $\epsilon_p$  per PV) è quello definito in precedenza.

Nella versione semplificata di PV lo scarico e ricarico è lineare e la sigma si annulla per il valore

$$\epsilon_{cp} = \epsilon_{c0} \left[ 0.166 \left( \frac{\epsilon_{\min}}{\epsilon_{c0}} \right)^2 + 0.132 \left( \frac{\epsilon_{\min}}{\epsilon_{c0}} \right) \right]$$

e quindi con una pendenza

$$E_{c\_sc} = \frac{\sigma(\epsilon_{\min})}{\epsilon_{\min} - \epsilon_{cp}}$$

Nota: nelle versioni precedenti alla 2.4 questo avveniva solo se  $\epsilon_{\min}$  aveva superato (cioè era minore di)  $\epsilon_{c0}$ . In realtà questo deve avvenire sempre (ed è così dalla versione 2.4).

## Modelli per calcestruzzo teso

## Legami costitutivi - Acciaio

### Elastico-perfettamente plastico

Tratto lineare fino allo snervamento e poi costante

Parametri da definire:

$f_y$  tensione di snervamento

$E_s$  modulo elastico; valore di default 200000 MPa

$\epsilon_{su}$  deformazione ultima (utilizzato a partire dalla versione 2.7);  
valore di default: varia linearmente da 0.23 per  $f_y \leq 340$  MPa a 0.14 per  $f_y = 400$  MPa a 0.12 per  $f_y = 450$  MPa a 0.075 per  $f_y \geq 480$  MPa

### Elastico-incrudente

Tratto lineare fino allo snervamento e poi linearmente crescente

Parametri da definire:

$f_y$  tensione di snervamento

$f_u$  tensione di rottura;  
valore di default: varia linearmente da  $1.55 f_y$  per  $f_y \leq 340$  MPa a  $1.2 f_y$  per  $f_y \geq 400$  MPa

$E_s$  modulo elastico; valore di default 200000 MPa

$E_{incr}$  modulo elastico incrudente;  
il valore di default è tale da raggiungere  $f_u$  alla deformazione  $\epsilon_{su}$

$\epsilon_{su}$  deformazione ultima;  
valore di default: varia linearmente da 0.23 per  $f_y \leq 340$  MPa a 0.14 per  $f_y = 400$  MPa a 0.12 per  $f_y = 450$  MPa a 0.075 per  $f_y \geq 480$  MPa

### Elastico-plastico-incrudente (Priestley)

Tratto lineare fino allo snervamento ( $\epsilon_y$ ), poi costante fino all'incrudimento ( $\epsilon_{sh}$ ), infine crescente con legge parabolica:

$$\sigma_s = f_u \left[ 1 - \left( 1 - \frac{f_y}{f_u} \right) \left( \frac{\epsilon_{su} - \epsilon}{\epsilon_{su} - \epsilon_{sh}} \right)^2 \right]$$

Parametri da definire:

$f_y$  tensione di snervamento

$f_u$  tensione di rottura;  
valore di default: varia linearmente da  $1.55 f_y$  per  $f_y \leq 340$  MPa a  $1.2 f_y$  per  $f_y \geq 400$  MPa

$E_s$  modulo elastico; valore di default 200000 MPa

$E_{incr}$  modulo elastico incrudente; è calcolato automaticamente  $E_{incr} = (f_u - f_y) / (\epsilon_{su} - \epsilon_y)$   
il valore di default è tale da raggiungere  $f_u$  alla deformazione  $\epsilon_{su}$

$\epsilon_{su}$  deformazione ultima;  
valore di default: varia linearmente da 0.23 per  $f_y \leq 340$  MPa a 0.14 per  $f_y = 400$  MPa a 0.12 per  $f_y = 450$  MPa a 0.075 per  $f_y \geq 480$  MPa

$\epsilon_{sh}$  deformazione di inizio incrudimento; valore di default  $15 \epsilon_y$